Pengaruh Struktur dan Banyaknya Pusat Jaringan Pada Penentuan Himpunan-[1,2] Optimal Suatu Graf

PPMI KK FMIPA ITB 2026 Skema Penelitian KK

S.W. Saputro, H. Assiyatun, R.M.G.S. Simanjuntak, A.N.M. Salman, S. Uttunggadewa, W. Djohan, Ferdi, M.A. Yusuf, F.D.M. Azalia

KK Matematika Kombinatorika FMIPA ITB

Abstrak

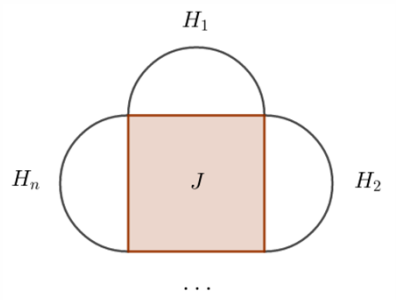
Misalkan G adalah suatu graf berhingga, terhubung, dan sederhana. Misalkan S adalah suatu himpunan bagian dari $V(G)$. Banyaknya tetangga dari v yang merupakan anggota S, dinotasikan sebagai $d_S(v)$. Himpunan S ini kemudian disebut sebagai **himpunan-[1,2]** apabila untuk setiap titik v di luar S memenuhi $1 \le d_S(v) \le 2$. Kardinalitas terkecil dari himpunan-[1,2] disebut sebagai **bilangan dominasi-[1,2]**.

Dalam penelitian ini, dikaji himpunan-[1,2] pada jaringan yang memiliki pusat. Pusat jaringan dapat berbentuk berbagai macam struktur, serta dapat membentuk berbagai macam koneksi terhadap cabang-cabangnya. Pada penelitian ini, kami memfokuskan kajian pada graf dengan pusat yang terdiri dari satu titik atau lebih. Jika pusat terdiri dari satu titik, jaringan dapat dipandang sebagai graf amalgasi titik. Akan tetapi, jika pusat terdiri lebih dari satu titik, pusat jaringan memiliki struktur yang sangat bervariasi. Oleh karena itu, kami memfokuskan kajian kasus ini pada jaringan yang memiliki struktur yang dapat dimodelkan sebagai graf operasi comb.

Keywords: bilangan dominasi-[1,2], graf amalgamasi titik, himpunan-[1,2], operasi comb.

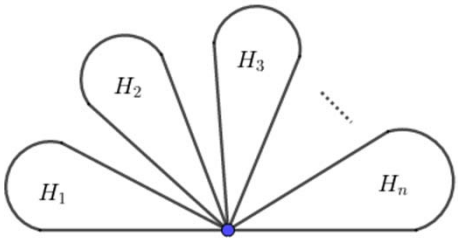
Graf Amalgamasi

Untuk n suatu bilangan asli dan $i \in \{1,2,\dots,n\}$, misalkan H_i adalah suatu graf terhubung yang memuat suatu subgraf J. Misalkan $H = \{H_1, H_2, \dots, H_n\}$ adalah koleksi dari graf-graf tersebut. Graf subgraf-amalgamasi dari H dikonstruksi dengan cara mengidentifikasi semua elemen dari H pada J. Graf ini kemudian dinotasikan dengan *Subgraph-Amal{H,J}*.



Gambar 1. Graf subgraph-amalgamasi

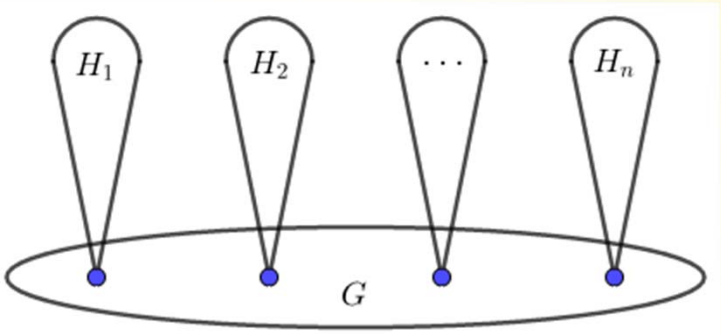
Pusat jaringan dapat digambarkan sebagai J, sedangkan cabang-cabang jaringan adalah semua H_i selain J. Pusat jaringan dapat berbentuk berbagai macam struktur, serta dapat membentuk berbagai macam koneksi terhadap cabang-cabangnya. Pada penelitian ini, kami memfokuskan kajian pada graf subgraf-amalgamasi dengan pusat jaringan berbentuk suatu titik. Graf amalgamasi ini lebih sering disebut sebagai graf amalgamasi titik



Gambar 2. Graf amalgamasi titik

Graf Operasi Comb

Graf operasi comb dari G dan H adalah graf yang dikonstruksi dengan cara memilih satu titik o di H, kemudian mengambil satu kopi dari G dan $|V(G)|$ kopi dari H, lalu menempelkan titik o kopian ke-i dari H ke titik ke-i di G. Dalam model ini, graf G dipandang menjadi pusat jaringan, sedangkan sebanyak $|V(G)|$ kopian graf H menjadi jaringan cabang. Dua titik pada cabang berbeda, harus melalui setidaknya dua titik dari G.



Gambar 3. Graf operasi comb dari G dan H

Hasil Penelitian

Teorema 1.
Misalkan G dan H adalah graf terhubung sederhana. Misalkan $o \in V(H)$ dan D_H adalah himpunan-[1,2] dengan kardinalitas minimum di H. Jika terjadi salah satu dari ketiga kondisi berikut:

1. tidak ada D_H yang memuat o;
2. terdapat himpunan D_H yang memuat o, dan $D_H \setminus \{o\}$ bukan himpunan-[1,2] di $H \setminus \{o\}$;
3. terdapat himpunan D_H yang memuat o, serta $D_H \setminus \{o\}$ suatu himpunan-[1,2] di $H \setminus \{o\}$ dan $|N_H(o) \cap (D_H \setminus \{o\})| \ge 3$;

maka berlaku

$$\gamma_{[1,2]}(G \rhd_o H) = |V(G)| \cdot \gamma_{[1,2]}(H).$$

Selain itu, berlaku

$$\gamma_{[1,2]}(G \rhd_o H) = \gamma_{[1,2]}(G) + |V(G)| \cdot (\gamma_{[1,2]}(H) - 1).$$

Teorema 2.
Misalkan $G = (V(G), E(G))$ dan $H = (V(H), E(H))$ adalah graf sederhana berorde minimal dua. Misalkan $F = \mathrm{Amal}(G(x), H(y))$ adalah graf amalgamasi titik yang dibangun oleh G dan H dengan mengidentifikasi titik $x \in V(G)$ dengan $y \in V(H)$. Maka berlaku

$$\gamma_{[1,2]}(G) + \gamma_{[1,2]}(H) + \min\{-1, \kappa_G(x) + \kappa_H(y)\} \le \gamma_{[1,2]}(F) \le |V| - \ell_F,$$

dengan ℓ_F menyatakan banyaknya titik daun di graf F, dan untuk titik $v \in G$, $\kappa_G(v) = \gamma_{[1,2]}(G \setminus \{v\}) - \gamma_{[1,2]}(G)$.

Output

1. S.W. Saputro, F.D.M. Azalia, B.A. Waskita, On (independent) [1,2]-sets of comb product graphs, preprint.
2. M.A. Yusuf, Ferdi, S.W. Saputro, On [1,2]-domination number of the vertex amalgamation graphs, preprint.